Title	Constructive Infinitely Long ExpressionsをもったLogicの Hierarchy (Proof theoryとRecursion theory研究会報告集)
Author(s)	上江州, 忠弘
Citation	数理解析研究所講究録 (1970), 86: 52-62
Issue Date	1970-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/108081
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
86巻 1970年 52-62

Constructive infinitely long expressions をもったlogicのhierarchy

九大 理　上江洲 忠弘

§1. 序

ω-typeのconjunction, quantificationをもつsimple type theoryで、そのformula, varietyをKino-Takeuti [K/T]の意味で'constructive'なものに限った形式的体系STCIを考える。$STCI^{\alpha,\beta}$をformulaやvarietyのω-typeのconjunctionの深さ、ω-typeのquantificationの深さが夫々ordinal α, βより小さいものに限ったSTCIのsubsystemとし、$STCI^{\alpha,\beta}$に数論の公理をつけ加えて得られる体系を$NSTCI^{\alpha,\beta}$とする。α, βを動かすことによって得られる$NSTCI^{\alpha,\beta}$のhierarchyについて述べる。

§2. 体系STCI

2.1. 定義. Type.

(1) 0と1はtypeである。

(2) $t_1, \cdots, t_n$がtypeならば$(t_1 \cdots t_n)$はtypeである。

(3) 以上によって得られるもののみがtypeである.

各 type t に対し、次の様に GN $\ulcorner t \urcorner$ が対応している：

$\ulcorner 0 \urcorner = 1$, $\ulcorner 1 \urcorner = 3$, $\ulcorner (t_1 \cdots t_n) \urcorner = \langle \ulcorner t_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner t_n \urcorner \rangle$,

但し $\langle m_1, \cdots, m_n \rangle$ は数 $2^{m_1} \cdots p_{n-1}^{m_n}$ を示す。

以後 type とその GN を同一視することがある。

2.2. 定義. Type 列.

値が type の GN である recursive function を type 列と呼ぶ。

2.3. STCI で用いる記号.

論理記号：$\neg$, $\wedge$, $\forall$.

変数記号：free s-variables : α_0^τ, α_1^τ, $\cdots$ （τ は type 列）.

bound s-variables : φ_0^τ, φ_1^τ, $\cdots$ （ 〃 ）.

free variables : a_0^t, a_1^t, $\cdots$ （t は type）.

bound variables : x_0^t, x_1^t, $\cdots$ （ 〃 ）.

constant variable : 0 （type は 0）.

他の記号：$\prime$, $\in$, λ, (,), $\longrightarrow$, ,, ', —.

これらの記号には各異なる GN が対応しているものとする。記号 S に対しその GN を $\ulcorner S \urcorner$ で表わす。

2.4. 定義. Qf とその GN, c-nn, q-nn.

(1) δ^τ が s-variable ならば、$\delta^\tau(j)$ は type $\tau(j)$ の qf で、その c-nn, q-nn は共に 0, $\langle \ulcorner \delta^\tau \urcorner, j+1 \rangle$ はその GN.

(2) 0 は type 0 の qf で、その c-nn, q-nn は共に 0, $\ulcorner 0 \urcorner$ はその GN.

(3) d^t が variable ならば, d^t は type t の qf で, その c-nn, q-nn は共に 0, $\ulcorner d^t \urcorner$ はその GN.

(4) T が type 0 の qf で a が T の GN ならば, T' は type 0 の qf で, その c-nn, q-nn は共に 0, $\langle \ulcorner ' \urcorner, a \rangle$ がその GN.

(5) $V_1, \cdots, V_k$ 及び V が夫々 type $t_1, \cdots, t_k$, $(t_1, \cdots, t_k)$ の qf で, $a_1, \cdots, a_k$, a が夫々 $V_1, \cdots, V_k$, V の GN ならば, $V_1 \cdots V_k \in V$ は type 1 の qf で, c-nn, q-nn は各 $\max\{Nt_c(V_1), \cdots, Nt_c(V_k), Nt_c(V)\}$, $\max\{Nt_q(V_1), \cdots, Nt_q(V_k), Nt_q(V)\}$, $\langle \ulcorner \in \urcorner, \langle a_1, \cdots, a_k \rangle, a \rangle$ が GN である, 但し, $Nt_c(E)$, $Nt_q(E)$ は夫々 E の c-nn, q-nn を示す。

(6) A が type 1 の qf, a が A の GN ならば, $\neg A$ は type 1 の qf で, c-nn, q-nn は夫々 A の c-nn, q-nn に等しく, $\langle \ulcorner \neg \urcorner, a \rangle$ は A の GN である.

(7) A, B が type 1 の qf, a, b が各 A, B の GN ならば, $(A \wedge B)$ は type 1 の qf で, c-nn, q-nn は夫々 $\max\{Nt_c(A), Nt_c(B)\}$, $\max\{Nt_q(A), Nt_q(B)\}$ で, $\langle \ulcorner \wedge \urcorner, a, b \rangle$ はその GN.

(8) $A_0, A_1, \cdots$ が type 1 の qf で, f が recursive function の Gödel number で, 各 i に対し $\{f\}(i)$ が A_i の GN ならば, $\wedge(A_0, A_1, \cdots)$ は type 1 の qf で, c-nn, q-nn は夫々 $\sup(Nt_c(A_0)+1, Nt_c(A_1)+1, \cdots)$, $\sup(Nt_q(A_0)+1, Nt_q(A_1)+1, \cdots)$,

$\langle \ulcorner\lambda\urcorner, f \rangle$ がその GN．

(9) x^t が bound variable，A が type 1 の qf，a が A の GN ならば，$\forall x^t A$ は type 1 の qf で，G-nn，q-nn は共に A のそれに等しく，$\langle \ulcorner\forall\urcorner, \ulcorner x^t\urcorner, a \rangle$ が GN．

(10) φ^τ が bound variable，A が type 1 の qf で，a が A の GN ならば，$\forall\varphi^\tau A$ は type 1 の qf で，G-nn は A の G-nn に等しく，q-nn は $N_{t_q}(A)+1$，$\langle \ulcorner\forall\urcorner, \ulcorner\varphi^\tau\urcorner, a \rangle$ はその GN である

(11) $y_1^{t_1}, \cdots y_k^{t_k}$ が夫々 type $t_1, \cdots, t_k$ の bound variable，A が type 1 の qf，a が A の GN ならば，$\lambda y_1^{t_1}\cdots y_k^{t_k} A$ は type $(t_1, \cdots, t_k)$ の qf で，G-nn，q-nn は共に A のそれらに等しく，$\langle \ulcorner\lambda\urcorner, \langle \ulcorner y_1^{t_1}\urcorner, \cdots, \ulcorner y_k^{t_k}\urcorner \rangle, a \rangle$ はその GN．

(12) (1)～(11) によって得られるもののみが qf である．

2.5．定義．Variety，formula，variety 列．

free variable，free s-variable を高々有限個しか含まず，bound variable，bound s-variable を free に含まない type t の qf を type t の variety といい，特に type 1 の variety を formula という．τ が type 列で，V_0，V_1，$\cdots$ が type $\tau(0)$，$\tau(1)$，$\cdots$ の variety で，各 n に対し $\Phi(n)$ が V_n の GN となるような recursive function Φ が存在するとき，$(V_0, V_1, \cdots)$ を variety 列と呼ぶ，但し，$(V_0, V_1, \cdots)$ は free variable，free s-variable を高々有

限個しか含まないものとする。

2.6. 定義. Sequent.

$A_1, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n$ が formula で, $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n$ が夫々の GN のとき, $A_1, \cdots, A_m \rightarrow B_1, \cdots, B_n$ を Sequent と呼ぶ. $\langle \ulcorner \rightarrow \urcorner, \langle a_1, \cdots, a_m, 1\rangle, \langle b_1, \cdots, b_n, 1\rangle\rangle$ はその GN である.

証明に関する概念は, Gentzen流に定義する, 但し, 推論に Extensionality を含むものとする.

2.7. 定理. 全ての q^+ の全ての GN の集合は Π_1^1-set であり, Π_1^1-set に関し complete である.

2.8. 定理. 各 q^+ の c-nn, q-nn は ω_1 (the least ordinal not constructive) より小さい.

2.9. 定義. c-subformula, q-subformula.

Variety B が variety A の c-subformula である ($B \preceq_c A$) ということは,

(1) B は A である,

(2) A が $V_1 \cdots V_n \in V$ の形で, $B \preceq_c V_1, \cdots, B \preceq_c V_n$ 又は $B \preceq_c V$ である,

(3) A が $\neg A_0$ で, $B \preceq_c A_0$ である,

(4) A が $(A_0 \wedge A_1)$ で, $B \preceq_c A_0$ 又は $B \preceq_c A_1$ である,

(5) A が $\forall x^t A_0(x^t)$ で, $B \preceq_c A_0(a^t)$ なる A に含まれない a^t

が存在する，

(6) A が $\lambda y_1^{t_1}\cdots y_n^{t_n} A_0(y_1^{t_1},\cdots,y_n^{t_n})$ で，$B \leq_c A_0(b_1^{t_1},\cdots,b_n^{t_n})$ なる A に含まれない互に異なる $b_1^{t_1},\cdots,b_n^{t_n}$ が存在する，又は

(7) A が $\forall\varphi^{\tau} A_0(\varphi^{\tau})$ で $B \leq_c A_0(\alpha^{\tau})$ なる A に含まれない α^{τ} が存在する，

ということである．

q-subformula は上の $\leq_c$ を $\leq_q$ におきかえ，(7) を次のものにかえて定義される．

(7′) A が $\wedge(A_0, A_1, \cdots)$ で，ある n に対し $B \leq_q A_n$.

2.10．定義．STCI の subsystem $STCI^{\alpha,\beta}$．

$0<\alpha,\beta\leq\omega_1$ なる ordinal number α，β に対し，c-nn，q-nn を夫々 α，β より小さい variety のみに限った STCI の subsystem を $STCI^{\alpha,\beta}$ とする．

2.11．定理．$0<\alpha,\beta\leq\omega_1$ ならば，$STCI^{\omega\times\alpha,\omega\times\beta}$ で cut-elimination theorem が成り立つ．

§ 3．$STCI^{\alpha,\beta}$ 上の number theory $NSTCI^{\alpha,\beta}$

3.1．定義．$NSTCI^{\alpha,\beta}$．

(1) $\alpha>1$ のとき，$STCI^{\alpha,\beta}$ に公理として Γ_N を加えたものが $NSTCI^{\alpha,\beta}$ である，但し，Γ_N は次の三つの公理である：

N_1: $\forall x_0^0 \neg x_0^{0\prime}=0$，

N_2: $\forall x_0^0 \forall x_1^0 (x_0^{0\prime}=x_1^{0\prime} \vdash x_0^0=x_1^0)$，

N_3 : $\forall x_0^{(0)}(0 \in x_0^{(0)} \wedge \forall x_1^0(x_1^0 \in x_0^{(0)} \vdash x_1^{0\prime} \in x_0^{(0)}) \vdash \forall x_0^0\, x_0^0 \in x_0^{(0)})$,

但し，$a^0 = b^0$ は $\forall x^{(0)}(a^0 \in x^{(0)} \vdash b^0 \in x^{(0)})$ の略であり，$A \vdash B$ は $\neg(A \wedge \neg B)$ の略である。

(2) $\alpha = 1$ のとき，$STCI^{\alpha,\beta}$ に公理として Γ_N を加え，更に ω-rule を加えたものが $NSTCI^{\alpha,\beta}$ である。

注意．$\alpha > 1$ のとき，$NSTCI^{\alpha,\beta}$ で ω-rule が導かれる．即ち，$\forall x^{(0)}(\bigwedge(0 \in x^{(0)}, 1 \in x^{(0)}, 2 \in x^{(0)}, \cdots) \vdash \forall x^0\, x^0 \in x^{(0)})$ が $NSTCI^{\alpha,\beta}$ で証明可能である，但し，1，2，… は $0'$，$0''$，… を示す。

Γ を formal expression のある集合とする．このとき，Γ の全ての元の GN の集合を $N^{\underline{o}}\Gamma$ で表わすことにする．$X^{\alpha,\beta}$ を $NSTCI^{\alpha,\beta}$ の全ての証明可能な formula の集合とすると，$N^{\underline{o}}X^{\alpha,\beta}$ は Π_1^1-set であり，$A_\omega \subset X^{\alpha,\beta}$ である，但し，A_ω は [G/M/R] の才２階述語論理の上の number theory の全ての証明可能な formula の集合である。従って Π_1^1-set は $X^{\alpha,\beta}$ で representable であるから，次の定理を得る．

3.2．定理．$Pr(a^0)$ を "a^0 は $NSTCI^{\alpha,\beta}$ で証明可能である" ということを表わす formula とすると，$n \in N^{\underline{o}}X^{\alpha,\beta}$ ならば，$Pr(n)$ は $NSTCI^{\alpha,\beta}$ で証明可能である．

3.3．定理．$NSTCI^{\alpha,\beta}$ が無矛盾ならば，$NSTCI^{\alpha,\beta}$ の無矛盾性は $NSTCI^{\alpha,\beta}$ では証明出来ない。

§4. $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}$ の hierarchy

4.1. $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}$ の subsystem $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}_{\#}$.

$\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}_{\#}$ は $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}$ を次の様にして制限して得られる体系である。

(1) type は 0, (0), $((0))$, $\cdots$ のみに制限する。

(( ) が n 個 0 についた type を $\bar{n}$ で表わす。)

(2) type 引は τ_0 のみ，但し，$\tau_0(i) = \ulcorner \overline{(i)}_0 \urcorner$.

4.2. 定理. $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}$ と $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}_{\#}$ は同等である。

4.3. 定理。$0<\beta<\alpha\leq\omega_1$ のとき，$\mathrm{NSTCI}^{\alpha,1}$ は本質的に $\mathrm{NSTCI}^{\beta,1}$ より強い体系である。

証明. $\mathrm{NSTCI}^{\beta,1}_{\#}$ の truth definition を $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,1}$ の中で行なう。まず，次の様な gfs を考える。以下に現われる論理記号 $\exists$, $\exists!$, $\vee$, $\vdash$, $\vdash\!\dashv$ は $\forall$, $\wedge$, $\neg$ を用いて通常の様に組合わせて得られたものの省略記号である。

$$
\begin{cases}
a^0 \doteq b^0 \equiv a^0 = b^0 . \\
a^0 \doteq b^{\overline{n+1}} \equiv \forall x^0 (x^0 < a^0 \vdash \exists y^{\bar{n}} (x^0 \doteq y^{\bar{n}} \wedge y^{\bar{n}} \in b^{\overline{n+1}})) \\
\qquad\qquad \wedge \forall y^{\bar{n}} (y^{\bar{n}} \in b^{\overline{n+1}} \vdash \exists x^0 (y^{\bar{n}} \doteq x^0 \wedge x^0 < a^0)) . \\
a^{\overline{m+1}} \doteq b^0 \equiv b^0 \doteq a^{\overline{m+1}} . \\
a^{\overline{m+1}} \doteq b^{\overline{n+1}} \equiv \forall x^{\bar{m}} (x^{\bar{m}} \in a^{\overline{m+1}} \vdash \exists y^{\bar{n}} (x^{\bar{m}} \doteq y^{\bar{n}} \wedge y^{\bar{n}} \in b^{\overline{n+1}})) \\
\qquad\qquad \wedge \forall y^{\bar{n}} (y^{\bar{n}} \in b^{\overline{n+1}} \vdash \exists x^{\bar{m}} (y^{\bar{n}} \doteq x^{\bar{m}} \wedge x^{\bar{m}} \in a^{\overline{n+1}})) .
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} a^{0} \dot{\in} b^{0} \equiv a^{0} < b^{0}. \\ a^{\bar{m}} \dot{\in} b^{\overline{n+1}} \equiv \exists x^{\bar{n}} (a^{\bar{m}} \doteq x^{\bar{n}} \wedge x^{\bar{n}} \in b^{\overline{n+1}}). \end{cases}$$

$V(x^{0}, y^{0}) \equiv$ " x^{0} は type y^{0} の variable である. ".

$$F_{m}(x^{0}, y^{\bar{m}}) \equiv \begin{cases} x^{0} = 0 \vdash \exists y_{1}^{0} (y_{1}^{0} \doteq y^{\bar{m}}). \\ x^{0} = a^{0\prime} \vdash \forall y_{1}^{\bar{m}} (y_{1}^{\bar{m}} \dot{\in} y^{\bar{m}} \vdash F_{m}(a^{0}, y_{1}^{\bar{m}}) . \end{cases}$$

$$A_{m}(a^{(\bar{m}\,0)}) \equiv \forall x^{0} \forall y^{0} (V(x^{0}, y^{0}) \vdash \exists ! y_{1}^{\bar{m}} (y_{1}^{\bar{m}} x^{0} \in a^{(\bar{m}\,0)} \wedge F_{m}(y^{0}, y_{1}^{\bar{m}})).$$

$$E_{m,n}(f^{(\bar{m}\,0)}, g^{(\bar{n}\,0)}, x^{0}) \equiv \forall y^{0} \forall z^{0} (V(y^{0}, z^{0}) \wedge \neg y^{0} = x^{0} \vdash$$
$$\exists y_{1}^{\bar{m}} \exists z_{1}^{\bar{n}} (y_{1}^{\bar{m}} y^{0} \in f^{(\bar{m}\,0)} \wedge z_{1}^{\bar{n}} y^{0} \in g^{(\bar{n}\,0)} \wedge y_{1}^{\bar{n}} \doteq z_{1}^{\bar{n}}))$$
$$\wedge A_{m}(f^{(\bar{m}\,0)}) \wedge A_{n}(g^{(\bar{n}\,0)}).$$

$\mathrm{Form}(x^{0}, y^{0}, z^{0}) \equiv$ " x^{0} は c-nn が constructive ordinal y^{0} より小で q-nn が constructive ordinal z^{0} より小な formula. ".

$\mathrm{SF}_{c}(w^{0}, x^{0}, y^{0}, z^{0}) \equiv \mathrm{Form}(w^{0}, y^{0}, z^{0}) \wedge$ " x^{0} は w^{0} の c-subformula. ".

$\mathrm{SF}_{q}(w^{0}, x^{0}, y^{0}, z^{0}) \equiv \mathrm{Form}(w^{0}, y^{0}, z^{0}) \wedge$ " x^{0} は w^{0} の q-subformula. ".

$$B_{m,n}(i^{0}, f^{(\bar{m}\,0)}, u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))}) \equiv$$

$$\{ i^{0} = \ulcorner 0 \urcorner \vdash i^{0} 0 f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \}$$

$$\wedge \{ i^{0} = \ulcorner a^{s} \urcorner \vdash \forall x^{\bar{n}} (i^{0} x^{\bar{n}} f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \dashv\vdash x^{\bar{n}} \ulcorner a^{s} \urcorner \in f^{(\bar{m}\,0)}) \}$$

$$\wedge \{ i^{0} = \ulcorner T' \urcorner \vdash \forall x^{0} (i^{0} x^{0} f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \dashv\vdash \exists y^{0} (\ulcorner T \urcorner y^{0} f^{(\bar{m}\,0)} \in u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \wedge x = y')) \}$$

$$\wedge \{ i^{0} = \ulcorner U \in V \urcorner \vdash (i^{0} 0 f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \dashv\vdash \exists x^{\bar{n}} \exists y^{\bar{n}} (\ulcorner U \urcorner x^{\bar{n}} f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \wedge \ulcorner V \urcorner y^{\bar{n}} f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in}$$
$$u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \wedge x^{\bar{n}} \dot{\in} y^{\bar{n}})) \}$$

$$\wedge \{ i^{0} = \ulcorner \neg A \urcorner \vdash (i^{0} 0 f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \dashv\vdash \ulcorner A \urcorner 1 f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))}) \}$$

$$\wedge \{ i^{0} = \ulcorner (A \wedge B) \urcorner \vdash (i^{0} 0 f^{(\bar{m}\,0)} \dot{\in} u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \dashv\vdash \ulcorner A \urcorner 0 f^{(\bar{m}\,0)} \in u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))} \wedge \ulcorner B \urcorner 0 f^{(\bar{m}\,0)} \in u^{(0\,\bar{n}\,(\bar{m}\,0))}) \}$$

$\wedge\{i^0 = \ulcorner \forall x^{\bar{k}} \mathfrak{A}(x^{\bar{k}})\urcorner \wedge k \leqq n \vdash (i^0 \circ f^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))} \vdash\!\dashv \forall g^{(\bar{n}0)}(E_{m,n}(f^{(\bar{n}0)}, g^{(\bar{n}0)}, \ulcorner a^{\bar{k}}\urcorner \vdash$

$\ulcorner \mathfrak{A}(a^{\bar{k}})\urcorner \circ g^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}))\}$

$\wedge\{i = \ulcorner \forall x^{\bar{k}} \mathfrak{A}(x^{\bar{k}})\urcorner \wedge k > n \vdash \forall j^0 \forall h^{(\bar{n}0)} \forall x^{\bar{n}} \neg j^0 x^{\bar{n}} h^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}\}$

$\wedge\{i^0 = \ulcorner \lambda x^{\bar{k}} \mathfrak{A}(x^{\bar{k}})\urcorner \wedge k \leqq n \vdash \forall x^{\bar{n}} (i^0 x^{\bar{n}} f^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))} \vdash\!\dashv \forall z^{\bar{n}}(z^{\bar{n}} \in x^{\bar{n}} \vdash\!\dashv$

$\exists g^{(\bar{n}0)}(E_{m,n}(f^{(\bar{n}0)}, g^{(\bar{n}0)}, \ulcorner a^{\bar{k}}\urcorner) \wedge z^{\bar{n}} \ulcorner a^{\bar{k}}\urcorner \in g^{(\bar{n}0)} \wedge \ulcorner \mathfrak{A}(a^{\bar{k}})\urcorner \circ g^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}))))\}$

$\wedge\{i^0 = \ulcorner \lambda x^{\bar{k}} (\mathfrak{A}(x^{\bar{k}})\urcorner \wedge k > n \vdash \forall j^0 \forall x^{\bar{n}} \forall h^{(\bar{n}0)} \neg j^0 x^{\bar{n}} h^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}\}$.

$S^1_{m,n}(h^0, u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}) \equiv \forall i^0 \forall x^0 \forall f^{(\bar{n}0)}(\mathrm{Form}(i^0, 2, 2) \wedge i^0 x^0 f^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))} \vdash$

$x^0 = 0 \vee x^0 = 1) \wedge \forall i^0 \forall f^{(\bar{n}0)}(SF_c(h^0, i^0, 2, 2) \wedge A_n(f^{(\bar{n}0)}) \vdash B_{n,n}(i^0, f^{(\bar{n}0)}, u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}))$.

$Sat^k_m(h^0, f^{(\bar{n}0)}) \equiv \bigvee(\exists u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}(S^k_{0,n}(h^0, u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}) \wedge h^0 \circ f^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}),$

$\exists u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}(S^k_{m,n}(h^0, u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}) \wedge h^0 \circ f^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}), \cdots) \wedge A_m(f^{(\bar{n}0)})$,

但し，$k = 1$ 又は $k = 2^h$.

$Sat^{3\,s^k}_m(h^0, f^{(\bar{n}0)}) \equiv \bigvee(Sat^{\{k\}(0)}_m(h^0, f^{(\bar{n}0)}), Sat^{\{k\}(1)}_m(h^0, f^{(\bar{n}0)}), \cdots)$.

$S^{2^k}_{m,n}(h^0, u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}) \equiv \forall i^0 \forall x^0 \forall f^{(\bar{n}0)}(\mathrm{Form}(i^0, 2^{2^k}, 2) \wedge i^0 x^0 f^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}$

$\vdash x^0 = 0 \vee x^0 = 1) \wedge \forall i^0 \forall f^{(\bar{n}0)}(SF_c(h^0, i^0, 2^{2^k}, 2) \wedge A_n(f^{(\bar{n}0)}) \vdash B_{n,m}(i^0, f^{(\bar{n}0)},$

$u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))}) \wedge \{i^0 = \ulcorner \bigwedge(A_0, A_1, \ldots)\urcorner \vdash (i^0 \circ f^{(\bar{n}0)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}0))} \vdash\!\dashv \forall j\, Sat^k_m(\ulcorner A_j \urcorner, f^{(\bar{n}0)}))\})$.

$St^k_m(i^0, f^{(\bar{n}0)}) \equiv i_0 = \ulcorner A_1, \ldots, A_r \to B_1, \ldots, B_s \urcorner \vdash \exists l \neg Sat^k_m(\ulcorner A_l \urcorner, f^{(\bar{n}0)}) \vee$

$\exists l\, Sat^k_m(\ulcorner B_l \urcorner, f^{(\bar{n}0)})$.

$\mathrm{Prov}(i^0, j^0, k^0) \equiv$ “j^0, k^0 が夫々 order type α, β の constructive ordinal ならば，i^0 は $\mathrm{NSTCI}^{\alpha,\beta}_{\#}$ で証明可能な formula である.”.

すると，次の事が成り立つ.

$$A_m(f^{(\bar{n}0)}),\ \mathrm{Prov}(i^0, n, 2) \to St^n_m(i^0, f^{(\bar{n}0)})$$

は，$NSTCI^{\alpha,1}$ で証明可能である．但し，$n \in O$ で $|n| < \alpha$．

従って，$\beta < \alpha$ に対し，$NSTCI^{\beta,1}_{\#}$ の無矛盾性が $NSTCI^{\alpha,1}$ でいえた．

同様に，次の定理が成り立つ．

4.4．定理．$0 < \beta < \alpha \leq \omega_1$ のとき $NSTCI^{\omega_1,\alpha}$ は本質的に $NSTCI^{\omega_1,\beta}$ より強い体系である．

参考文献

[G/M/R] A. Grzegorczyk, A. Mostowski and C. Ryll-Nardzewski, The classical and the ω-complete arithmetic, J. S. L., 23 (1958), 188-206.

[K/T] A. Kino and G. Takeuti, On predicates with constructive infinitely long expressions, J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), 176-190.